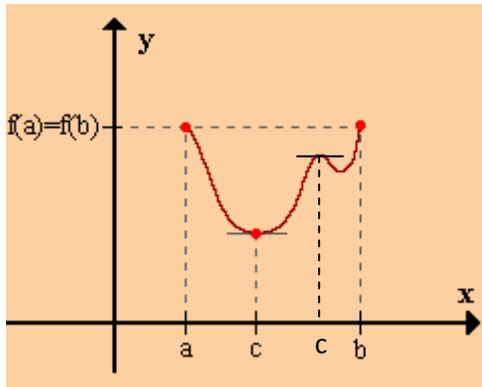


TEOREMAS DE DERIVADAS.

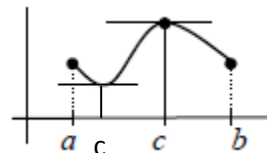
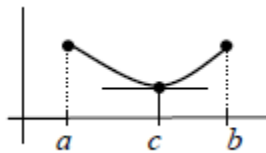
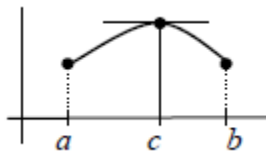
1.- Teorema de ROLLE.



Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto (a, b) y vale lo mismo en los extremos del intervalo $f(a) = f(b)$, entonces:

Existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ en el que la derivada vale cero ($f'(c) = 0$).

Geométricamente significa que existe al menos un punto en (a, b) en el que la tangente es horizontal (en la gráfica adjunta hay dos puntos).



2.- Teorema del valor medio generalizado de CAUCHY .

Si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivables en el intervalo abierto (a, b) y con $g'(b) \neq g'(a)$; entonces:

Existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ de modo que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Demostración: Construimos la función: $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$

Observemos que cumple las condiciones del teorema de ROLLE:

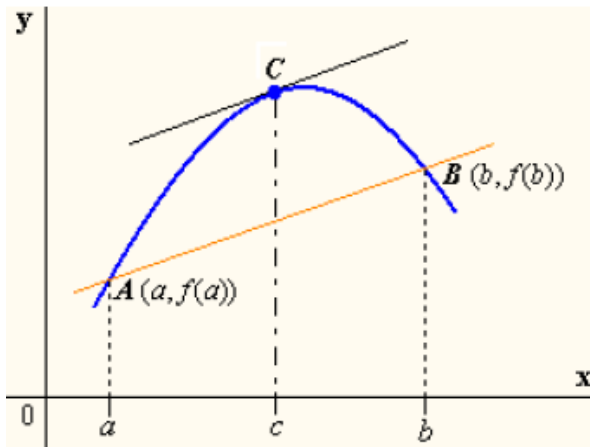
$$\begin{aligned} &h(x) \text{ es continua en } [a, b] \text{ por serlo } f(x) \text{ y } g(x) \\ &h(x) \text{ es derivable en } (a, b) \text{ por serlo } f(x) \text{ y } g(x) \\ &h(a) = f(a)[g(b) - g(a)] - g(a)[f(b) - f(a)] = f(a)g(b) - f(b)g(a) \\ &h(b) = f(b)[g(b) - g(a)] - g(b)[f(b) - f(a)] = f(a)g(b) - f(b)g(a) \\ &\text{Efectivamente comprobamos que } h(a) = h(b) \end{aligned}$$

Su derivada será: $h'(x) = f'(x)[g(b) - g(a)] - g'(x)[f(b) - f(a)]$

$$\exists c \in (a, b) \quad / \quad h'(c) = 0 \Rightarrow f'(c)[g(b) - g(a)] - g'(c)[f(b) - f(a)] = 0 \Rightarrow$$

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)] \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \quad \text{c. s. q. d.}$$

3.- Teorema del valor medio de LAGRANGE. Teorema de los incrementos finitos.



Es un caso particular del teorema anterior que dice:

Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, derivable en el intervalo abierto (a,b) ; entonces:

Existe, al menos, un punto $c \in (a,b)$ de modo que la pendiente de la función en ese punto es lo mismo que la pendiente media entre a y b .

Es decir:

$$\exists c \in (a,b) \quad / \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Geométricamente significa que existe al menos un punto c en (a,b) en el que la tangente a la curva tiene la misma pendiente que la secante que une los puntos $A(a,f(a))$ y $B(b,f(b))$

Demostración: Es fácil, basta con tomar en el Teorema de CAUCHY la función $g(x)=x$

$$\exists c \in (a,b) \quad / \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \Rightarrow \frac{f'(c)}{1} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{c. s. q. d.}$$

4.- Regla de L'HÔPITAL

Es una regla que permite utilizar las derivadas para calcular algunos límites que estén expresados en forma de cociente y bajo determinadas condiciones.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas y derivables en un entorno de " a " y

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) = 0$$

Se tiene que:
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La demostración es sencilla en este caso del tipo $\frac{0}{0}$ sin mas que aplicar el Teorema de CAUCHY en el intervalo $[a,x]$ y tomar límites cuando $x \rightarrow a$. INTÉNTALO.

También puede utilizarse si: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

Es decir, se puede utilizar en indeterminaciones de los tipos: $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$

Ésta regla es válida cuando " a " es un número real, pero también cuando es $+\infty$ ó $-\infty$